Министерство цифрового развития, связи и массовых коммуникаций Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики» (СибГУТИ)
Уральский технический институт связи и информатики (филиал) в г. Екатеринбурге
(УрТИСИ СибГУТИ)

УТВЕРЖДАЮ
директор УрТИСИ СибГУТИ
_______________Минина Е.А.
«___»___________2025 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Б1.О.04 Высшая математика

Направление подготовки / специальность: **11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»**

Направленность (профиль) /специализация: **Программирование и администрирование систем связи**

Форма обучения: **очная**

Год набора: 2026

Разработчик (-и):
доцент ___________________ /В.Т. Куаньшев/
подпись

Оценочные средства обсуждены и утверждены на заседании кафедры высшей математики и физики (ВМиФ)
Протокол от 20.11.2025 г. № 3
Заведующий кафедрой ______________________ /В.Т. Куаньшев/
подпись

Екатеринбург, 2025

Министерство цифрового развития, связи и массовых коммуникаций Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики» (СибГУТИ)
Уральский технический институт связи и информатики (филиал) в г. Екатеринбурге
(УрТИСИ СибГУТИ)

УТВЕРЖДАЮ
директор УрТИСИ СибГУТИ
_______________Минина Е.А.
«____» ____________2025 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Б1.О.04 Высшая математика

Направление подготовки / специальность: **11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»**

Направленность (профиль) /специализация: **Программирование и администрирование систем связи**

Форма обучения: **очная**

Год набора: 2026

Разработчик (-и):
доцент ____________________ /В.Т. Куанышев/
подпись

Оценочные средства обсуждены и утверждены на заседании кафедры высшей математики и физики (ВМиФ)
Протокол от 20.11.2025 г. № 3
Заведующий кафедрой ______________________ /В.Т. Куанышев/
подпись

Екатеринбург, 2025

1. Перечень компетенций и индикаторов их достижения

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенций	Этап	Предшествующие этапы (с указанием дисциплин/практик)
ОПК-1 Способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности	ОПК-1.1-Знает фундаментальные законы природы и основные физические математические законы и методы накопления, передачи и обработки информации ОПК-1.2-Умеет применять физические законы и математически методы для решения задач теоретического и прикладного характера ОПК-1.3-Владеет навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач	1	-

Форма промежуточной аттестации по дисциплине – экзамены 1 и 2 семестры

2. Показатели, критерии и шкалы оценивания компетенций

2.1 Показателем оценивания компетенций на этапе их формирования при изучении дисциплины является уровень их освоения.

Индикатор освоения компетенции	**Показатель оценивания**	**Критерий оценивания**
ОПК-1.1. Знает фундаментальные законы природы и основные физические математические законы и методы накопления, передачи и обработки информации	Знает фундаментальные законы природы и основные физические математические законы и методы накопления, передачи и обработки информации	Знаком с основами математики, физики и вычислительной техники. элементами программирования. Знает твердо основы высшей математики, физики, основы вычислительной техники и программирования
ОПК-1.2-Умеет применять физические законы и математически методы для решения задач теоретического и прикладного характера	Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования	Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний. Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и

		общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования. Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования
ОПК-1.3-Владеет навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач	Имеет навыки: теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности	Имеет начальные навыки: теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности. Имеет навыки: теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности. Имеет навыки: теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности

Шкала оценивания.
Экзамен

5-балльная шкала	Критерии оценки
«отлично»	На экзаменационные вопросы даны полные аргументированные ответы. Студент демонстрирует сформированность дисциплинарных компетенций на итоговом уровне, обнаруживает всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного материала по всем разделам дисциплины. Студент усвоил основную литературу и знаком с дополнительной литературой, рекомендованной программой, свободно оперирует приобретенными знаниями, умениями, применяет их при выполнении заданий.
«хорошо»	На экзаменационные вопросы даны полные аргументированные ответы, но с замечаниями преподавателя. Студент демонстрирует сформированность дисциплинарных компетенций на среднем уровне: основные знания, умения освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при ответе на поставленные вопросы, по основным разделам дисциплины. Допущены ошибки при решении задач
«удовлетворительно»	На экзаменационные вопросы даны ответы со слабой аргументацией, преподаватель задал множество наводящих вопросов. Студент демонстрирует сформированность дисциплинарных компетенций на базовом уровне: в ходе выполнения практических заданий, решения задач допускаются значительные ошибки, проявляется отсутствие отдельных знаний, по некоторым дисциплинарным разделам, студент испытывает значительные затруднения при оперировании знаниями и по основным разделам дисциплины
«неудовлетворительно»	Студент демонстрирует сформированность дисциплинарных

	компетенций на уровне ниже порогового, проявляется недостаточность знаний. Дисциплинарные компетенции не сформированы. Проявляется полное или практически полное отсутствие знаний по темам дисциплины, отсутствуют навыки решения задач.

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания по дисциплине

3.1. В ходе реализации дисциплины используются следующие формы и методы текущего контроля

Тема и/или раздел	**Формы/методы текущего контроля успеваемости**
ОПК-1.1. Знает фундаментальные законы природы и основные физические математические законы и методы накопления, передачи и обработки информации	
Тема 1. Векторные пространства и линейная алгебра.	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 2. Элементы аналитической геометрии.	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 3. Введение в математический анализ.	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 4. Дифференциальное исчисление.	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 5. Интегральное исчисление функции одного переменного.	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 6. Функции нескольких переменных (ФНП).	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ).	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 8. Элементы векторного анализа.	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 9. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление.	Лекции Практическое занятие Экзамен
ОПК-1.2-Умеет применять физические законы и математически методы для решения задач теоретического и прикладного характера	
Тема 1. Векторные пространства и линейная алгебра.	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 2. Элементы аналитической геометрии.	Лекции Практическое занятие Экзамен

Тема 3. Введение в математический анализ.	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 4. Дифференциальное исчисление.	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 5. Интегральное исчисление функции одного переменного.	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 6. Функции нескольких переменных (ФНП).	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ).	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 8. Элементы векторного анализа.	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 9. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление.	Лекции Практическое занятие Экзамен
ОПК-1.3-Владеет навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач	
Тема 1. Векторные пространства и линейная алгебра.	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 2. Элементы аналитической геометрии.	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 3. Введение в математический анализ.	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 4. Дифференциальное исчисление.	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 5. Интегральное исчисление функции одного переменного.	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 6. Функции нескольких переменных (ФНП).	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ).	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 8. Элементы векторного анализа.	Лекции Практическое занятие Экзамен
Тема 9. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление.	Лекции Практическое занятие Экзамен

3.2.Типовые материалы текущего контроля успеваемости обучающихся

ОПК-1.1. Знает фундаментальные законы природы и основные физические математические законы и методы накопления, передачи и обработки информации.
ОПК-1.2-Умеет применять физические законы и математически методы для решения задач теоретического и прикладного характера.
ОПК-1.3-Владеет навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач.

Тема для дискуссии: «Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление».

1. Что такое комплексное число.
2. Какова структура комплексного числа и как оно записывается.
3. Чем отличается вещественное число от мнимого числа.
4. Почему важно изучение комплексных чисел.
5. Что представляет собой комплексная плоскость.
6. Какие оси образуют координатные оси комплексной плоскости.
7. Как интерпретируется модуль комплексного числа геометрически.
8. Что означает аргумент комплексного числа.
9. Как связаны координаты точки на комплексной плоскости с её алгебраическим представлением.
10. Как складывать и вычитать комплексные числа графически.
11. Объясните правило умножения комплексных чисел в полярной форме.
12. Приведите пример деления двух комплексных чисел и поясните методику решения.
13. Что значит возвести комплексное число в степень.
14. Как извлечь корень n-й степени из комплексного числа.

Типовое практическое задание по теме: «*Предел функции, свойства пределов. Раскрытие неопределенностей Первый и второй замечательные пределы*».

Цель работы:

-. Изучить понятие предела функции, свойства предела функций. способы задания функции.

- Основные способы раскрытия неопределенностей пределов функций.
- Свойства первого и второго замечательных пределов.

<u>ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ</u>

ПРИМЕР 1

Найти значение предела функции $y=\dfrac{3x^2-2}{x+3}$, при $x \to 2$.

РЕШЕНИЕ:

Решение сводится к вычислению предела $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2}{x+3}$.

Применим к заданному пределу теорему о пределах (1.8.):

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-2\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x+3\right)}.$$

Каждый из пределов $\lim_{x\to 2}\left(3x^2-2\right)$; $\lim_{x\to 2}\left(x+3\right)$ является пределом от элементарной функции (степенной). Их значения найдем по формуле, непосредственно подставляя в выражение каждой из функций вместо переменной *x* ее предельное значение $x_0=2$, тогда:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2}{x+3}=\frac{\lim_{x\to 2}\left(3x^2-2\right)}{\lim_{x\to 2}\left(x+3\right)}=\frac{3\cdot 4-2}{2+3}=\frac{10}{5}=2.$$

Из вычислений видно, что числитель полученного выражения стремится к 10, знаменатель – к 5, а предел их отношения стремится к 2, следовательно число 2 является пределом заданной функции при $x\to 2$.

ПРИМЕР 2

Найти значение предела: $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}.$$

РЕШЕНИЕ:

1. Непосредственная подстановка предельного значения аргумента $x_0=2$ приводит к неопределенности типа $\frac{0}{0}$, так как $\lim_{x\to 2}\left(x^2-4\right)=0$ и $\lim_{x\to 2}\left(x^3-8\right)=0$. В этом и подобных случаях нельзя воспользоваться теоремой о пределах (1.6.) - (1.8.), однако непосредственная подстановка необходима для определения типа неопределенности.

2. Раскроем неопределенность $\frac{0}{0}$, путем сокращения дроби на множитель $\left(x-2\right)$, создающий неопределенность (см. п.4.1.). Затем снова проверим значение предела непосредственной подстановкой $x_0=2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{\left(x-2\right)}\left(x+2\right)}{\cancel{\left(x-2\right)}\left(x^2+2x+4\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x+2\right)}{\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{2+2}{4+4+4}=\frac{1}{3}.$$

<u>I Раскрытие неопределенностей</u>

Предел элементарной функции в точке ее определения x_0 равен частному значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right).$$

В общем случае функция $f\left(x\right)$ может быть и не определена в точке x_0, т.е. $x_0\notin X$.

Предел постоянной величины *C* равен самой постоянной *C*:

$$\lim_{x\to x_0} C=C.$$

Нарушение ограничений, накладываемых на функции при вычислении их пределов, приводит к *неопределенностям* вида:

$$\left(\frac{0}{0}\right);\quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right);\quad \left(\infty-\infty\right);\quad \left(0\cdot\infty\right);\quad \left(1^{\infty}\right).$$

Элементарными *приемами раскрытия неопределенностей* являются:

- сокращение множителя, создающего неопределенность;
- перевод иррациональности из числителя в знаменатель (или наоборот) путем умножения на сопряженное выражение и числителя, и знаменателя дроби;

- деление числителя и знаменателя на одну и ту же функцию аргумента (часто старшую степенную функцию аргумента);
- применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших;
- использование I и II замечательных пределов.

Замечание: использование приемов 4.4* и 4.5* будет рассмотрено в теме 2.

Теорема о пределах.
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. Тогда:

$$\lim_{x \to x_0}\left(f(x) \pm g(x)\right) = A \pm B \;;$$

$$\lim_{x \to x_0}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = A \cdot B \;;$$

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}\,, \quad \text{если} \quad B \neq 0\,;$$

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x)^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}\,.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1

Найти значение предела: $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Подстановка предельного значения аргумента $x_0 = 1$ снова приводит к неопределенности типа $\frac{0}{0}$. Однако в отличие от Примера 2 здесь нельзя сразу сократить числитель и знаменатель дроби на множитель $(x-1)$, создающий эту неопределенность.

2. Для раскрытия неопределенности предварительно преобразуем функцию, умножив числитель и знаменатель дроби на $\left(\sqrt{3+x}+2\right)$ - выражение, сопряженное числителю; тем самым переведем иррациональность из числителя в знаменатель).

$$\lim_{x \to 1}\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1}\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{3+x}+2}{\sqrt{3+x}+2} = \lim_{x \to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{3+x}+2\right)} =$$

3. Сократив дробь на $(x-1)$, раскрываем неопределенность. Затем находим значение предела непосредственной подстановкой $x_0 = 1$.

$$= \lim_{x \to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{3+x}+2\right)} = \lim_{x \to 1}\frac{1}{\sqrt{3+x}+2} = \frac{1}{4}.$$

ПРИМЕР 2

Найти значение предела: $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{12x^3+5x-2}{-4x^3+7}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$, которая раскрывается путем деления числителя и знаменателя исходной дроби на одну и ту же функцию аргумента.
2. Для раскрытия данной неопределенности разделим числитель и знаменатель на старшую степень аргумента, т.е. на функцию x^3. Так как при $x \to \infty$ слагаемые $5/x^2$, $2/x^3$ и $7/x^3$ являются бесконечно малыми, то в результате получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^3+5x-2}{-4x^3+7}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{12+5/x^2-2/x^3}{-4+7/x^3}=\frac{12+0+0}{-4+0}=-3$$

ПРИМЕР 3

Найти значение предела: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x+100}{3^{2x}-1}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Подстановка предельного аргумента снова приводит к неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$.

2. Разделим числитель и знаменатель на функцию 3^x, в результате получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+100}{3^{2x}-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+100/3^x}{3^x-1/3^x}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0,$$

поскольку при $x\to\infty$ слагаемые $100/3^x$ и $1/3^x$ являются бесконечно малыми, то функция в знаменателе 3^x при $x\to\infty$ остается бесконечно большой.

Неопределенности типа $(\infty-\infty)$ и $(0\cdot\infty)$ предварительно сводятся к неопределенностям типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, основные способы раскрытия которых рассмотрены выше.

ПРИМЕР 4

Найти значение предела: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+a)}-x\right)$.

РЕШЕНИЕ:

1. Подстановка предельного аргумента приводит к неопределенности типа $\infty-\infty$.
2. Умножим и разделим выражение в скобках на сопряженное ему: $\left(\sqrt{x(x+a)}+x\right)$. Таким образом, неопределенность типа $(\infty-\infty)$ преобразуется в неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, которая раскрывается, в данном случае, делением числителя и знаменателя дроби на множитель x:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+a)}-x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+a)}-x\right)\frac{\sqrt{x(x+a)}+x}{\sqrt{x(x+a)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x+a)-x^2}{\sqrt{x(x+a)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+ax-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{a\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+a/x}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+a/x}+1}=\frac{a}{1+1}=\frac{a}{2}$$

II Первый и второй замечательные пределы

1. *I замечательный предел*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to 0$.

часто встречаются следующие его разновидности:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{nx}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{nx}{\sin nx}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{arctg\,x}{x}=1 \text{ и т.д.}$$

II замечательный предел:

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e,$$

часто встречаются следующие его разновидности:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;\quad \lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k;\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k.$$

2. Две функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, одновременно стремящиеся к нулю или бесконечности при $x\to x_0$, называются эквивалентными и обозначаются $\alpha(x)\sim\beta(x)$, если: $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$

Предел отношения бесконечно малых (бесконечно больших) функций не изменится, если каждую из них заменить эквивалентной ей функцией, т.е.:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

Примеры некоторых эквивалентных функций:

$\sin x\sim x$,	при $x\to 0$	$(1+x)^n\sim 1+nx$,	при $x\to 0$
$tg\,x\sim x$,	при $x\to 0$	$\sqrt[n]{1+x}\sim 1+\frac{1}{n}x$,	при $x\to 0$
$\cos x\sim 1-\frac{1}{2}x^2$,	при $x\to 0$	$\ln(1+x)\sim x$,	при $x\to 0$
$ch\,x\sim 1+\frac{1}{2}x^2$,	при $x\to 0$	$a^x\sim 1+x\ln a$,	при $x\to 0$
$sh\,x\sim x$,	при $x\to 0$	$e^x\sim 1+x$,	при $x\to 0$

3. При нахождении пределов вида

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=C$$

следует иметь в виду, что:

3.1. если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ и } \lim_{x\to x_0}g(x)=B, \qquad \text{то}\quad C=A^B;$$

3.2. если $\lim_{x\to x_0}f(x)=A\neq 1$ и $\lim_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$, то вопрос о нахождении предела) решается непосредственно;

3.3. если $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=1$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=\pm\infty$, то имеет место неопределенность типа $\left(1^{\infty}\right)$, которая раскрывается с помощью II замечательного предела. В таких случаях полагают $f\left(x\right)=1+\alpha\left(x\right)$, где $\alpha\left(x\right)\to 0$ при $x\to x_0$ и, следовательно,

$$C=\lim_{x\to x_0}\left\{\left[1+\alpha\left(x\right)\right]^{\frac{1}{\alpha\left(x\right)}}\right\}^{\alpha\left(x\right)\cdot g\left(x\right)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\left(\alpha\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right)},$$

где $e\approx 2,718\ldots$. – число Эйлера.

4. Если существует и положителен $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$, то:

$$\lim_{x\to x_0}\left[\ln f\left(x\right)\right]=\ln\left[\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)\right]$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1

Найти значение предела: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Подстановка предельного аргумента $x_0=0$ приводит к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$, следовательно, в данном пределе можно выделить I замечательный предел

2. Домножим числитель и знаменатель дроби на 5, тогда:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 5x}{5x}=5\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}_{\substack{I\ замечательный\\ предел}}=5\cdot 1=5.$$

ПРИМЕР 2

Найти значение предела: $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{x^2-\pi^2}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Непосредственная подстановка предельного аргумента приводит к неопределенности типа $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия введем новую переменную $t=x-\pi$. Учитывая, что $t\to 0$ и $x=t+\pi$, получаем:

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 3x}{x^2-\pi^2}=\left|\begin{array}{c} t=x-\pi \\ t\to 0 \\ x=t+\pi \end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(3t+3\pi\right)}{t\cdot\left(t+2\pi\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t\cdot\cos 3\pi+\cos 3t\cdot\sin 3\pi}{t\cdot\left(t+2\pi\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 3t}{t\cdot\left(t+2\pi\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 3t\cdot 3}{3t\cdot\left(t+2\pi\right)}=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{3t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{3}{t+2\pi}=-1\cdot\frac{3}{2\pi}=-\frac{3}{2\pi}$$

ПРИМЕР 3

Найти значение предела: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-e^{-2x}\right)\left(\cos\left(3x\right)-1\right)}{x\cdot tg^2 x}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Учитывая формулы эквивалентных при $x \to 0$ функций, находим, что:

$$\left(1-e^{-2x}\right)\sim -2x; \qquad \cos\left(3x\right)-1\sim\frac{1}{2}\left(3x\right)^2=\frac{9}{2}x^2; \qquad tg^2 x\sim x^2.$$

2. Заменяя в пределе бесконечно малые функции их эквивалентами, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-e^{-2x}\right)\left(\cos\left(3x\right)-1\right)}{x\cdot tg^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\cdot\frac{9}{2}x^2}{x\cdot x^2}=-9.$$

ПРИМЕР 4

Найти значение предела: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.

РЕШЕНИЕ:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)}$.

2. Учитывая формулу первого замечательного предела, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}\left(1+x\right)=1.$$

Поэтому:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=2^1=2.$$

ПРИМЕР 5

Найти значение предела: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{1-x}$.

РЕШЕНИЕ:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{1-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-x\right)}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+1/x}{2+1/x}=\dfrac{1}{2}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-x\right)=-\infty$.

Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1-x}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}\right)=\left(2^{\infty}\right)=\infty.$$

ПРИМЕР 6

Найти значение предела: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x-1}$.

РЕШЕНИЕ:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)} = \left(1^{\infty}\right)$

2. Для раскрытия неопределенности преобразуем выражение в скобках к виду $1+\alpha\left(x\right)$:

$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1+\left(\frac{-2}{x+1}\right).$

получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x-1} = \left(1^{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{x-1} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}^{\frac{-2}{x+1}\cdot(x-1)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}}_{\textit{II замечательный предел}}{}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(x-1)}{x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(x-1)}{x+1}} = e^{-2}.$$

ПРИМЕР 7

Найти значение предела: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}$.

РЕШЕНИЕ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+x\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\underbrace{\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right]}_{\textit{II замечательный предел}} = \ln e = 1.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ:

I Найти значения следующих пределов:

1. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{3x^2-3ax+5x-5a}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$

II Найти значения следующих пределов:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{4x^2+x+1}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+3\sqrt{x}-4x\sqrt{x}}{1-x}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x+1}}}{x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2}{x^2-1}-x\right)$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]$

III Найти значения следующих пределов:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{x^2}$;

2. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}$ замена $x-1=t$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+3}{(x-5)^2+3x^2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x-3}}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x-6)^2}{3x^2-5+x}\right)^{\frac{4x^2+3}{1+2x}}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x+2}{x+2}\right)^{\frac{4x+1}{x(3x+2)}}$;

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-3}\right)^{\frac{2x^2-6x+1}{1-2x}}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln x+\ln\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)\right]$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$;

10. $\lim\limits_{n\to 0}\left(n^2\ln\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$

3.3.Типовые материалы для проведения промежуточной аттестации обучающихся

ОПК-1 Способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности

Типовые вопросы и задания к экзамену:

1. Определитель матрицы. Свойства определителя. Вычисление определителей.
2. Понятие матрицы. Умножение матрицы на число, сложение и умножение матриц, операция транспонирования.
3. Парабола, ее каноническое уравнение. Характеристики гиперболы.
4. Способы задания прямой на плоскости: общее уравнение прямой, уравнение прямой с угловым коэффициентом.
5. Скалярное произведение в декартовых координатах.
6. Линейные операции над матрицами.
7. Произведение матриц. $c_{ij}=a_{ik}b_{kj}$
8. Векторное произведение в декартовых координатах.
9. Методы решения систем линейных уравнений: метод Гаусса.
10. Эллипс, его каноническое уравнение и параметры.
11. Условия параллельности и перпендикулярности прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой.
12. Способы задания прямой на плоскости: уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, уравнение прямой, проходящей через две точки.
13. Методы решения систем линейных уравнений: метод Крамера.
14. Исследование системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
15. Гипербола, ее каноническое уравнение. Характеристики гиперболы.

16. Система однородных линейных уравнений.
17. Функция одной переменной, основные понятия. Общие свойства функций. Способы задания функций.
18. График функции в различных системах координат. Прямоугольная (декартова) и полярная системы координат. Переход из полярной в декартовую систему координат и обратный переход.
19. Ограниченность функции – основные понятия. Точные границы функции.
20. Числовая последовательность – основные понятия. Способы задания числовой последовательности, ее свойства.
21. Предел последовательности - определение, геометрический смысл.
22. Предел функции в бесконечности, его геометрический смысл.
23. Предел функции в точке, его геометрический смысл.
24. Понятие бесконечно малой функции, ее свойства.
25. Понятие бесконечно большой величины, ее свойства. Связь бесконечно больших и бесконечно малых величин.
26. Основные свойства пределов.
27. Основные типы неопределенностей и способы их раскрытия при вычислении пределов функций.
28. I замечательный предел. Схема применения к решению пределов.
29. II замечательный предел. Схема применения к решению пределов.
30. Приращение аргумента функции и приращение функции. Условия непрерывности функции в точке и на промежутке (a; b). Понятие одностороннего предела.
31. Классификация точек разрыва функции. Особенности решения односторонних пределов.
32. Определение производной функции. Геометрический и физический смысл производной.
33. Правила вычисления производной. Производная сложной функции. Производные высшего порядка.
34. Общая схема логарифмического дифференцирования сложных функций. Дифференцирование неявных функций.
35. Теорема Бернулли и правило Лопиталя. Его применение к вычислению пределов.
36. Асимптоты функции. Исследование функции с помощью асимптот. Общая схема исследования функции.
37. Понятие первообразной. Определение неопределенного интеграла.
38. Метод замены переменной интегрирования.
39. Метод интегрирования по частям.
40. Метод подведения подынтегральной функции под знак интеграла.
41. Первообразная и неопределенный интеграл.
42. Основные методы интегрирования: замена переменной, интегрирование по частям.
43. Интегрирование основных классов элементарных функций.
44. Разложение рациональной дроби на простейшие. Интегрирование рациональных, тригонометрических функций.
45. Интегрирование некоторых иррациональных функций
46. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Вычисление простейших интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница.
47. Свойства определенного интеграла.
48. Вычисление определенных интегралов. Замена переменной в определенном интеграле.
49. Интегрирование по частям.
50. Интеграл с переменным верхним пределом.
51. Приложения определенного интеграла.
52. Геометрические приложения определенного интеграла: площадь плоской фигуры.
53. Геометрические приложения определенного интеграла: длина дуги кривой.
54. Геометрические приложения определенного интеграла: площадь поверхности вращения; объем тела.

55. Приложения определенного интеграла к некоторым задачам механики и физики: моменты и центры масс плоских кривых; физические задачи.
56. Несобственные интегралы. Интегралы с бесконечными пределами.
57. Интегралы от неограниченных функций. Некоторые сведения о приближенных методах вычисления определенного интеграла.
58. Понятия функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции. Частные производные. Дифференциал функции и его применение.
59. Дифференцирование сложных и неявных функций.
60. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условие экстремума.
61. Условный экстремум. Функция Лагранжа.
62. Наибольшее и наименьшее значения функции. Геометрические приложения частных производных.
63. Интегрирование функций многих переменных. Криволинейные интегралы 1 рода.
64. Вычисление криволинейных интегралов первого рода.
65. Свойства криволинейных интегралов первого рода.
66. Криволинейные интегралы 2 рода.
67. Вычисление криволинейных интегралов второго рода.
68. Свойства криволинейных интегралов второго рода.
69. Двойной интеграл: свойства двойного интеграла и его вычисление в декартовых прямоугольных координатах.
70. Приложения двойных интегралов.
71. Тройной интеграл: тройной интеграл и его вычисление в декартовых прямоугольных координатах.

Банк контрольных вопросов, заданий и иных материалов, используемых в процессе процедур текущего контроля и промежуточной аттестации находится в учебно-методическом комплексе дисциплины и/или представлен в электронной информационно-образовательной среде по URI: http://www.aup.uisi.ru/.

3.4.Методические материалы проведения текущего контроля и промежуточной аттестации обучающихся

Перечень методических материалов для подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации:

1. Методические указания по выполнению практических занятий по дисциплине «Высшая математика». – URL: http://aup.uisi.ru/3584165/