Министерство цифрового развития, связи и массовых коммуникаций Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»
(СибГУТИ)
Уральский технический институт связи и информатики (филиал) в г. Екатеринбурге
(УрТИСИ СибГУТИ)

УТВЕРЖДАЮ
директор УрТИСИ СибГУТИ
Минина Е.А.
«27» 12 2024 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ
Б1.О.04 Высшая математика

Направление подготовки / специальность: **11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»**

Направленность (профиль) / специализация: **Транспортные сети и системы связи**

Форма обучения: **очная, заочная**

Год набора: 2025

Разработчик (-и):
Старший преподаватель _________________ / А.И. Бурумбаев
подпись

Оценочные средства обсуждены и утверждены на заседании высшей математики и физики (ВМиФ)
Протокол от 19.11.2024 №3
Заведующий кафедрой _________________ / В.Т. Куанышев
подпись

Екатеринбург, 2024

Министерство цифрового развития, связи и массовых коммуникаций Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»
(СибГУТИ)
Уральский технический институт связи и информатики (филиал) в г. Екатеринбурге
(УрТИСИ СибГУТИ)

УТВЕРЖДАЮ
директор УрТИСИ СибГУТИ
_______________Минина Е.А.
«____» ____________2024 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ
Б1.О.04 Высшая математика

Направление подготовки / специальность: **11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»**

Направленность (профиль) /специализация: **Транспортные сети и системы связи**

Форма обучения: **очная, заочная**

Год набора: 2025

Разработчик (-и):
Старший преподаватель ___________________ / А.И. Бурумбаев /
подпись

Оценочные средства обсуждены и утверждены на заседании высшей математики и физики (ВМиФ)
Протокол от 19.11.2024 г. № 3
Заведующий кафедрой ___________________ / В.Т. Куанышев /
подпись

Екатеринбург,2024

1. Перечень компетенций и индикаторов их достижения

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенций	Этап	Предшествующие этапы (с указанием дисциплин)
ОПК-1 Способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности	ОПК-1.1-Знает фундаментальные законы природы и основные физические математические законы и методы накопления, передачи и обработки информации ОПК-1.2-Умеет применять физические законы и математически методы для решения задач теоретического и прикладного характера ОПК-1.3-Владеет навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач	1,2	

Форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине: экзамен (1,2 семестр).

2. Показатели, критерии и шкалы оценивания компетенций

2.1 Показателем оценивания компетенций на этапе их формирования при изучении дисциплины является уровень их освоения.

Индикатор освоения компетенции	**Показатель оценивания**	**Критерий оценивания**
ОПК 1.1 – Знать фундаментальные законы природы и основные физические математические законы и методы накопления, передачи и обработки информации	Знать: фундаментальные законы природы и основные физические математические законы и методы накопления, передачи и обработки информации Умеет применять физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера Владеть навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач	Демонстрирует уверенные знания определений и терминологического аппарата, основных понятий, знает методы, процедуры, свойства, приводит факты, идентифицирует, дает обзорное описание математических моделей. Умеет анализировать, интерпретировать результаты, применять законы и использовать математический аппарат для решения практических задач Выполняет алгебраические преобразования для наглядного представления результатов расчетов, проводит приближенные расчеты для оценки данных; выявляет взаимосвязи, классифицирует, планирует

		математические модели
ОПК 1.2 - Уметь применять физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера	Знать: фундаментальные законы природы и основные физические математические законы и методы накопления, передачи и обработки информации Умеет применять физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера Владеть навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач	Демонстрирует уверенные знания о Демонстрирует уверенные знания определений и терминологического аппарата, основных понятий, знает методы, процедуры, свойства, приводит факты, идентифицирует, дает обзорное описание математических моделей. Умеет анализировать, интерпретировать результаты, применять законы и использовать математический аппарат для решения практических задач Выполняет алгебраические преобразования для наглядного представления результатов расчетов, проводит приближенные расчеты для оценки данных; выявляет взаимосвязи, классифицирует, планирует математические модели
ОПК 1.3 - Владеть навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач	Знать: фундаментальные законы природы и основные физические математические законы и методы накопления, передачи и обработки информации Умеет применять физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера Владеть навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач	Демонстрирует уверенные знания о Демонстрирует уверенные знания определений и терминологического аппарата, основных понятий, знает методы, процедуры, свойства, приводит факты, идентифицирует, дает обзорное описание математических моделей. Умеет анализировать, интерпретировать результаты, применять законы и использовать математический аппарат для решения практических задач Выполняет алгебраические преобразования для наглядного представления результатов расчетов, проводит приближенные расчеты для оценки данных; выявляет взаимосвязи, классифицирует, планирует математические модели

Шкала оценивания.

5-балльная шкала	Критерии оценки
Отлично «5»	1. Самостоятельно и правильно ответил на поставленные теоретические вопросы экзаменационного билета. Уверенно, логично, последовательно и аргументировано

	излагает свой ответ. Может ответить на дополнительные вопросы. 2. Самостоятельно и правильно решил все предложенных задачи экзаменационного билета. Уверенно и логично объясняет ход решения, обосновывая его определениями и утверждениями высшей математики.
Хорошо «4»	1. Самостоятельно ответил на поставленные теоретические вопросы экзаменационного билета. Не уверенно отвечает на уточняющие и дополнительные вопросы. 2. Самостоятельно и правильно решил две предложенные задачи экзаменационного билета. Уверенно и логично объясняет ход решения, обосновывая его определениями и утверждениями высшей математики
Удовлетворительно «3»	1. Самостоятельно ответил на поставленные теоретические вопросы экзаменационного билета. При этом допускает ошибки. Не уверенно или вообще не отвечает на уточняющие и дополнительные вопросы. 2. Решил одну из предложенных задач экзаменационного билета. При наличии ошибок, может исправить их за счет наводящих вопросов. Не уверенно объясняет ход решения задачи.
Неудовлетворительно «2»	1. Не решена задача экзаменационного билета. 2. Решена задача, но не даны ответы на теоретические вопросы экзаменационного билета.

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания по дисциплине

3.1 В ходе реализации дисциплины используются следующие формы и методы текущего контроля

Тема и/или раздел	**Формы/методы текущего контроля успеваемости**
ОПК 1.1 – Знать фундаментальные законы природы и основные физические математические законы и методы накопления, передачи и обработки информации	
Тема 1. Векторные пространства и линейная алгебра	экзамен
Тема 2. Элементы аналитической геометрии	экзамен
Тема 3. Введение в математический анализ.	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 4. Дифференциальное исчисление	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 5. Интегральное исчисление функции одного переменного	Практическая работа-зачет, экзамен
ОПК 1.2 - Уметь применять физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера	
Тема 4. Дифференциальное исчисление	Практическая работа-зачет, экзамен

Тема 5. Интегральное исчисление функции одного переменного	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 6. Обыкновенные дифференциальные уравнения	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 7. Функции нескольких переменных	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 8. Элементы векторного анализа	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 9. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление	экзамен
ОПК 1.3 - Владеть навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач	
Тема 4. Дифференциальное исчисление	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 5. Интегральное исчисление функции одного переменного	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 6. Обыкновенные дифференциальные уравнения	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 7. Функции нескольких переменных	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 8. Элементы векторного анализа	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 9. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление	Практическая работа-зачет, экзамен

3.2. Типовые материалы текущего контроля успеваемости обучающихся

ОПК-1 Способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности

Практическая работа №11 по теме «Предел функции, свойства пределов. Раскрытие неопределенностей. Первый и второй замечательные пределы»

1. Цель работы:

1.1. Изучить понятие предела функции, свойства предела функций. способы задания функции.

1.2 Основные способы раскрытия неопределенностей пределов функций.

1.3 Свойства первого и второго замечательных пределов..

2. Подготовка к работе:

Изучить главы учебного пособия [1, 2, стр. 132-147], посвященные соответствующим вопросам практического занятия. Изучить соответствующие материалы по конспекту лекций.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

I Предел функции, свойства пределов

1. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X=\{x\}$, тогда:

Число *A* называется *предело́м функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$ (*или в точке* x_0) и обозначается:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

если для любого, даже сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию:

$$|x - x_0| < \delta,$$

выполняется неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

2. Функция $\alpha(x)$ $\quad (F(x))$ называется *бесконечно малой* (*бесконечно большой*) при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \qquad \left(\lim_{x \to x_0} F(x) = \infty \right).$$

3. К *простейшим элементарным функциям* относятся:

степенная функция $y = x^n$;

показательная функция $y = a^x$;

логарифмическая функция $y = \log_a x$;

тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$;

обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg\, x$, $y = arcctg\, x$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1

Найти значение предела функции $y = \dfrac{3x^2 - 2}{x+3}$, при $x \to 2$.

РЕШЕНИЕ:

Решение сводится к вычислению предела $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 2}{x+3}$.

Применим к заданному пределу теорему о пределах (1.8.):

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 2}{x+3} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 2)}{\lim\limits_{x \to 2} (x+3)}.$$

Каждый из пределов $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 2)$; $\lim\limits_{x \to 2} (x+3)$ является пределом от элементарной функции (степенной). Их значения найдем по формуле, непосредственно подставляя в выражение каждой из функций вместо переменной x ее предельное значение $x_0 = 2$, тогда:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 2}{x+3} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 2)}{\lim\limits_{x \to 2} (x+3)} = \frac{3 \cdot 4 - 2}{2+3} = \frac{10}{5} = 2.$$

Из вычислений видно, что числитель полученного выражения стремится к 10, знаменатель – к 5, а предел их отношения стремится к 2, следовательно число 2 является пределом заданной функции при $x \to 2$.

ПРИМЕР 2

Найти значение предела: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Непосредственная подстановка предельного значения аргумента $x_0=2$ приводит к неопределенности типа $\frac{0}{0}$, так как $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-4\right)=0$ и $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-8\right)=0$. В этом и подобных случаях нельзя воспользоваться теоремой о пределах (1.6.) - (1.8.), однако непосредственная подстановка необходима для определения типа неопределенности.

2. Раскроем неопределенность $\frac{0}{0}$, путем сокращения дроби на множитель $(x-2)$, создающий неопределенность (см. п.4.1.). Затем снова проверим значение предела непосредственной подстановкой $x_0=2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}\left(x^2+2x+4\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{2+2}{4+4+4}=\frac{1}{3}.$$

II Раскрытие неопределенностей

Предел элементарной функции в точке ее определения x_0 равен частному значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

В общем случае функция $f(x)$ может быть и не определена в точке x_0, т.е. $x_0\notin X$.

Предел постоянной величины *C* равен самой постоянной *C*:

$$\lim_{x\to x_0} C=C.$$

Нарушение ограничений, накладываемых на функции при вычислении их пределов, приводит к *неопределенностям* вида:

$$\left(\frac{0}{0}\right);\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right);\ (\infty-\infty);\ (0\cdot\infty);\ \left(1^{\infty}\right).$$

Элементарными *приемами раскрытия неопределенностей* являются:

- сокращение множителя, создающего неопределенность;
- перевод иррациональности из числителя в знаменатель (или наоборот) путем умножения на сопряженное выражение и числителя, и знаменателя дроби;
- деление числителя и знаменателя на одну и ту же функцию аргумента (часто старшую степенную функцию аргумента);
- применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших;
- использование I и II замечательных пределов.

Замечание: использование приемов 4.4* и 4.5* будет рассмотрено в теме 2.

Теорема о пределах.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. Тогда:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=A\pm B\ ;$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=A\cdot B\ ;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\ ,\quad \text{если}\quad B\neq 0\,;$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}f(x)^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}\ .$$

<u>ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ</u>

ПРИМЕР 1

Найти значение предела: $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Подстановка предельного значения аргумента $x_0=1$ снова приводит к неопределенности типа $\frac{0}{0}$. Однако в отличие от Примера 2 здесь нельзя сразу сократить числитель и знаменатель дроби на множитель $(x-1)$, создающий эту неопределенность.

2. Для раскрытия неопределенности предварительно преобразуем функцию, умножив числитель и знаменатель дроби на $\left(\sqrt{3+x}+2\right)$ - выражение, сопряженное числителю; тем самым переведем иррациональность из числителя в знаменатель).

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{3+x}+2}{\sqrt{3+x}+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{3+x}+2\right)}=$$

3. Сократив дробь на $(x-1)$, раскрываем неопределенность. Затем находим значение предела непосредственной подстановкой $x_0=1$.

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{3+x}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{3+x}+2}=\frac{1}{4}.$$

ПРИМЕР 2

Найти значение предела: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{12x^3+5x-2}{-4x^3+7}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$, которая раскрывается путем деления числителя и знаменателя исходной дроби на одну и ту же функцию аргумента.

2. Для раскрытия данной неопределенности разделим числитель и знаменатель на старшую степень аргумента, т.е. на функцию x^3. Так как при $x\to\infty$ слагаемые $5/x^2$, $2/x^3$ и $7/x^3$ являются бесконечно малыми, то в результате получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^3+5x-2}{-4x^3+7}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{12+5/x^2-2/x^3}{-4+7/x^3}=\frac{12+0+0}{-4+0}=-3$$

ПРИМЕР 3

Найти значение предела: $$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+100}{3^{2x}-1}.$$

РЕШЕНИЕ:

1. Подстановка предельного аргумента снова приводит к неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$.

2. Разделим числитель и знаменатель на функцию 3^x, в результате получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+100}{3^{2x}-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+100/3^x}{3^x-1/3^x}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0,$$

поскольку при $x\to\infty$ слагаемые $100/3^x$ и $1/3^x$ являются бесконечно малыми, то функция в знаменателе 3^x при $x\to\infty$ остается бесконечно большой.

Неопределенности типа $(\infty-\infty)$ и $(0\cdot\infty)$ предварительно сводятся к неопределенностям типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, основные способы раскрытия которых рассмотрены выше.

ПРИМЕР 4

Найти значение предела: $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+a)}-x\right).$$

РЕШЕНИЕ:

1. Подстановка предельного аргумента приводит к неопределенности типа $\infty-\infty$.

2. Умножим и разделим выражение в скобках на сопряженное ему: $\left(\sqrt{x(x+a)}+x\right)$. Таким образом, неопределенность типа $(\infty-\infty)$ преобразуется в неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, которая раскрывается, в данном случае, делением числителя и знаменателя дроби на множитель x:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+a)}-x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+a)}-x\right)\frac{\sqrt{x(x+a)}+x}{\sqrt{x(x+a)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x+a)-x^2}{\sqrt{x(x+a)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+ax-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{a\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+a/x}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+a/x}+1}=\frac{a}{1+1}=\frac{a}{2}$$

II Первый и второй замечательные пределы

1. *I замечательный предел*:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to0$.

часто встречаются следующие его разновидности:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin nx}{nx}=1;\quad \lim_{x\to0}\frac{nx}{\sin nx}=1;\quad \lim_{x\to0}\frac{tg\,x}{x}=1;\quad \lim_{x\to0}\frac{arctg\,x}{x}=1\ \text{ и т.д.}$$

II замечательный предел:

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e,$$

часто встречаются следующие его разновидности:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e;\quad \lim_{x\to 0}\left(1+kx\right)^{\frac{1}{x}}=e^k;\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k.$$

2. Две функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, одновременно стремящиеся к нулю или бесконечности при $x\to x_0$, называются эквивалентными и обозначаются $\alpha(x)\sim\beta(x)$, если: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$

Предел отношения бесконечно малых (бесконечно больших) функций не изменится, если каждую из них заменить эквивалентной ей функцией, т.е.:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

Примеры некоторых эквивалентных функций:

$\sin x\sim x,$ при $x\to 0$ $\qquad (1+x)^n\sim 1+nx,$ при $x\to 0$

$tg\,x\sim x,$ при $x\to 0$ $\qquad \sqrt[n]{1+x}\sim 1+\frac{1}{n}x,$ при $x\to 0$

$\cos x\sim 1-\frac{1}{2}x^2,$ при $x\to 0$ $\qquad \ln(1+x)\sim x,$ при $x\to 0$

$ch\,x\sim 1+\frac{1}{2}x^2,$ при $x\to 0$ $\qquad a^x\sim 1+x\ln a,$ при $x\to 0$

$sh\,x\sim x,$ при $x\to 0$ $\qquad e^x\sim 1+x,$ при $x\to 0$

3. При нахождении пределов вида

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=C$$

следует иметь в виду, что:

3.1. если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ и } \lim_{x\to x_0}g(x)=B, \quad \text{то} \quad C=A^B;$$

3.2. если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 1$ и $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$, то вопрос о нахождении предела) решается непосредственно;

3.3. если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$, то имеет место неопределенность типа $\left(1^\infty\right)$, которая раскрывается с помощью II замечательного предела. В таких случаях полагают $f(x)=1+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$ и, следовательно,

$$C=\lim_{x\to x_0}\left\{\left[1+\alpha(x)\right]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right\}^{\alpha(x)\cdot g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\left(\alpha(x)\cdot g(x)\right)},$$

где $e\approx 2,718\ldots$ – число Эйлера.

4. Если существует и положителен $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$, то:

$$\lim_{x\to x_0}\left[\ln f\left(x\right)\right]=\ln\left[\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)\right]$$

<u>ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ</u>

ПРИМЕР 1

Найти значение предела: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Подстановка предельного аргумента $x_0=0$ приводит к неопределенности $\left(\dfrac{o}{o}\right)$, следовательно, в данном пределе можно выделить I замечательный предел

2. Домножим числитель и знаменатель дроби на 5, тогда:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left(\frac{o}{o}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 5x}{5x}=5\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}_{\text{I замечательный предлел}}=5\cdot 1=5.$$

ПРИМЕР 2

Найти значение предела: $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{\sin 3x}{x^2-p^2}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Непосредственная подстановка предельного аргумента приводит к неопределенности типа $\dfrac{o}{o}$. Для ее раскрытия введем новую переменную $t=x-p$. Учитывая, что $t\to 0$ и $x=t+p$, получаем:

$$\lim_{x\to p}\frac{\sin 3x}{x^2-p^2}=\left|\begin{matrix}t=x-p\\ t\to 0\\ x=t+p\end{matrix}\right|=\lim_{t\to o}\frac{\sin\left(3t+3p\right)}{t\cdot\left(t+2p\right)}=\lim_{t\to o}\frac{\sin 3t\cdot\cos 3p+\cos 3t\cdot\sin 3p}{t\cdot\left(t+2p\right)}=$$

$$=\lim_{t\to o}\frac{-\sin 3t}{t\cdot\left(t+2p\right)}=\lim_{t\to o}\frac{-\sin 3t\cdot 3}{3t\cdot\left(t+2p\right)}=-\lim_{t\to o}\frac{\sin 3t}{3t}\cdot\lim_{t\to o}\frac{3}{t+2p}=-1\cdot\frac{3}{2p}=-\frac{3}{2p}$$

ПРИМЕР 3

Найти значение предела: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-e^{-2x}\right)\left(\cos\left(3x\right)-1\right)}{x\cdot tg^2x}$.

РЕШЕНИЕ:

1. Учитывая формулы эквивалентных при $x\to 0$ функций, находим, что:

$$\left(1-e^{-2x}\right)\sim -2x;\qquad \cos\left(3x\right)-1\sim\frac{1}{2}\left(3x\right)^2=\frac{9}{2}x^2;\qquad tg^2x\sim x^2.$$

2. Заменяя в пределе бесконечно малые функции их эквивалентами, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-e^{-2x}\right)\left(\cos(3x)-1\right)}{x\cdot tg^2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\cdot\frac{9}{2}x^2}{x\cdot x^2}=-9.$$

ПРИМЕР 4

Найти значение предела: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$.

РЕШЕНИЕ:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)}$.

2. Учитывая формулу первого замечательного предела, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)=1.$$

Поэтому:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=2^1=2.$$

ПРИМЕР 5

Найти значение предела: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1-x}$.

РЕШЕНИЕ:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+1/x}{2+1/x}=\frac{1}{2}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)=-\infty$.

Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1-x}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}\right)=\left(2^{\infty}\right)=\infty.$$

ПРИМЕР 6

Найти значение предела: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x-1}$.

РЕШЕНИЕ:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)}=\left(1^{\infty}\right)$

2. Для раскрытия неопределенности преобразуем выражение в скобках к виду $1+\alpha(x)$:

$$\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=1+\left(\frac{-2}{x+1}\right).$$

получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x-1}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}^{\frac{-2}{x+1}\cdot(x-1)}=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}}_{II\ \text{замечательный предел}}{}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(x-1)}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(x-1)}{x+1}}=e^{-2}.$$

ПРИМЕР 7

Найти значение предела: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

РЕШЕНИЕ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln\left[\underbrace{\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{II\ \text{замечательный предел}}\right]=\ln e=1\ .$$

<u>ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ:</u>

I Найти значения следующих пределов:

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{3x^2-3ax+5x-5a}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$

II Найти значения следующих пределов**:**

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{4x^2+x+1}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3\sqrt{x}-4x\sqrt{x}}{1-x}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x+1}}}{x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+2}{x^2-1}-x\right)$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]$

III Найти значения следующих пределов:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{x^2}$;

2. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\,\dfrac{\pi x}{2}$ замена $x-1=t$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+3}{(x-5)^2+3x^2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x-3}}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(x-6)^2}{3x^2-5+x}\right)^{\frac{4x^2+3}{1+2x}}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3x+2}{x+2}\right)^{\frac{4x+1}{x(3x+2)}}$;

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x-3}\right)^{\frac{2x^2-6x+1}{1-2x}}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln x+\ln\left(\sin\frac{1}{x}\right)\right]$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$;

10. $\lim\limits_{n\to 0}\left(n^2\ln\cos\frac{\pi}{n}\right)$

3.3 Типовые материалы для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень вопросов для экзаменов**:**

1. Определитель матрицы. Свойства определителя. Вычисление определителей
2. Асимптоты функции. Исследование функции с помощью асимптот. Общая схема исследования функции
3. Линейные операции над матрицами
4. Понятие матрицы. Умножение матрицы на число, сложение и умножение матриц, операция транспонирования
5. Методы решения систем линейных уравнений: метод Гаусса
6. Предел последовательности - определение, геометрический смысл
7. Способы задания прямой на плоскости: уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, уравнение прямой, проходящей через две точки
8. Приращение аргумента функции и приращение функции. Условия непрерывности функции в точке и на промежутке (a; b). Понятие одностороннего предела.
9. Понятие бесконечно малой функции, ее свойства. Понятие бесконечно большой величины, ее свойства. Связь бесконечно больших и бесконечно малых величин
10. Общая схема логарифмического дифференцирования сложных функций. Дифференцирование неявных функций.
11. Гипербола, ее каноническое уравнение. Характеристики гиперболы
12. Способы задания прямой на плоскости: общее уравнение прямой, уравнение прямой с угловым коэффициентом
13. Скалярное произведение в декартовых координатах
14. Векторное произведение в декартовых координатах.
15. Функция одной переменной, основные понятия. Общие свойства функций. Способы задания функций.
16. График функции в различных системах координат. Прямоугольная (декартова) и полярная системы координат. Переход из полярной в декартовую систему координат и обратный переход
17. Неопределенный интеграл. Первообразная.
18. Табличное интегрирование.
19. Интегрирование с помощью замены переменных
20. Интегрирование по частям
21. Интегрирование рациональных функций
22. Интегрирование тригонометрических функций
23. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.
24. Решение ОДУ первого порядка и задачи Коши для них
25. Решение ОДУ второго порядка и задачи Коши для них.

26. Решение линейных ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.
27. Метод Эйлера решения дифференциальных уравнений.
28. Метод Бернулли. Дифференциальное уравнение Бернулли.
29. Метод неопределенных коэффициентов.
30. Применение ДУ к решению физических задач
31. Функции многих переменных.
32. Предел и непрерывность функции многих переменных.
33. Дифференцирование функций многих переменных.
34. Геометрические приложения функций многих переменных.
35. Вычисление частных производных функции многих переменных.
36. Локальный экстремум функции двух переменных.
37. Необходимое и достаточное условие экстремума функции двух переменных.
38. Условный экстремум функции двух переменных.
39. Функция Лагранжа функции двух переменных.
40. Интегрирование функций многих переменных. Криволинейные интегралы 1 рода.
41. Вычисление криволинейных интегралов первого рода.
42. Свойства криволинейных интегралов первого рода.
43. Криволинейные интегралы 2 рода.
44. Теория функций комплексного переменного. Комплексные числа.
45. Элементарные функции комплексного переменного.
46. Формы представления комплексного числа.

Банк контрольных вопросов, заданий и иных материалов, используемых в процессе процедур текущего контроля и промежуточной аттестации находится в учебно-методическом комплексе дисциплины и/или представлен в электронной информационно-образовательной среде по URI:http://www.aup.uisi.ru.

3.4 Методические материалы проведения текущего контроля и промежуточной аттестации обучающихся

Перечень методических материалов для подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации:
Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Высшая математика». – URL: http://aup.uisi.ru/ http://aup.uisi.ru/3816837/