

Министерство цифрового развития, связи и массовых коммуникаций Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»  
(СибГУТИ)

Уральский технический институт связи и информатики (филиал) в г. Екатеринбурге  
(УрТИСИ СибГУТИ)



УТВЕРЖДАЮ  
директор УрТИСИ СибГУТИ  
Минина Е.А.  
«07» 05 2023 г.

## ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### ПО ДИСЦИПЛИНЕ Б1.О.04 Высшая математика


Направление подготовки / специальность: **11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»**

Направленность (профиль) / специализация: **Транспортные сети и системы связи**

Форма обучения: **очная, заочная**

Год набора: 2023

Разработчик (-и):  
к.ф.-м.н., доцент

 /Ю.Ф. Шаманаев/

Оценочные средства обсуждены и утверждены на заседании высшей математики и физики (ВМиФ)

Протокол от 25.05.2023 г. № 9

Заведующий кафедрой  /В.Т. Куанышев

подпись

Екатеринбург, 2023

Министерство цифрового развития, связи и массовых коммуникаций Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»  
(СибГУТИ)  
Уральский технический институт связи и информатики (филиал) в г. Екатеринбурге  
(УрТИСИ СибГУТИ)

УТВЕРЖДАЮ  
директор УрТИСИ СибГУТИ  
\_\_\_\_\_ Минина Е.А.  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023 г.

## **ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ**

### **ПО ДИСЦИПЛИНЕ Б1.О.04 Высшая математика**

Направление подготовки / специальность: **11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»**

Направленность (профиль) / специализация: **Транспортные сети и системы связи**

Форма обучения: **очная, заочная**

Год набора: 2023

Разработчик (-и):  
к.ф.-м.н., доцент \_\_\_\_\_ /Ю.Ф. Шаманаев/

Оценочные средства обсуждены и утверждены на заседании высшей математики и физики (ВМиФ)

Протокол от 25.05.2023 г. № 9

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ /В.Т. Куанышев  
подпись

Екатеринбург, 2023

## 1. Перечень компетенций и индикаторов их достижения

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенций	Этап	Предшествующие этапы (с указанием дисциплин)
ОПК-1 Способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности	ОПК-1.1-Знает фундаментальные законы природы и основные физические математические законы и методы накопления, передачи и обработки информации  ОПК-1.2-Умеет применять физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера  ОПК-1.3-Владеет навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач	1,2	

Форма(ы) промежуточной аттестации по дисциплине: экзамен (1,2 семестр).

## 2. Показатели, критерии и шкалы оценивания компетенций

2.1 Показателем оценивания компетенций на этапе их формирования при изучении дисциплины является уровень их освоения.

Индикатор освоения компетенции	Показатель оценивания	Критерий оценивания
ОПК 1.1 – Знать фундаментальные законы природы и основные физические математические законы и методы накопления, передачи и обработки информации	Знать: фундаментальные законы природы и основные физические математические законы и методы накопления, передачи и обработки информации Умеет применять физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера Владеть навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач	Демонстрирует уверенные знания определений и терминологического аппарата, основных понятий, знает методы, процедуры, свойства, приводит факты, идентифицирует, дает обзорное описание математических моделей.  Умеет анализировать, интерпретировать результаты, применять законы и использовать математический аппарат для решения практических задач  Выполняет алгебраические преобразования для наглядного представления результатов расчетов, проводит приближенные расчеты для оценки данных; выявляет взаимосвязи, классифицирует, планирует

		математические модели
ОПК 1.2 - Уметь применять физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера	Знать: фундаментальные законы природы и основные физические математические законы и методы накопления, передачи и обработки информации Умеет применять физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера Владеть навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач	Демонстрирует уверенные знания о Демонстрирует уверенные знания определений и терминологического аппарата, основных понятий, знает методы, процедуры, свойства, приводит факты, идентифицирует, дает обзорное описание математических моделей.  Умеет анализировать, интерпретировать результаты, применять законы и использовать математический аппарат для решения практических задач  Выполняет алгебраические преобразования для наглядного представления результатов расчетов, проводит приближенные расчеты для оценки данных; выявляет взаимосвязи, классифицирует, планирует математические модели
ОПК 1.3 - Владеть навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач	Знать: фундаментальные законы природы и основные физические математические законы и методы накопления, передачи и обработки информации Умеет применять физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера Владеть навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач	Демонстрирует уверенные знания о Демонстрирует уверенные знания определений и терминологического аппарата, основных понятий, знает методы, процедуры, свойства, приводит факты, идентифицирует, дает обзорное описание математических моделей.  Умеет анализировать, интерпретировать результаты, применять законы и использовать математический аппарат для решения практических задач  Выполняет алгебраические преобразования для наглядного представления результатов расчетов, проводит приближенные расчеты для оценки данных; выявляет взаимосвязи, классифицирует, планирует математические модели

### Шкала оценивания.

5-балльная шкала	Критерии оценки
Отлично «5»	1. Самостоятельно и правильно ответил на поставленные теоретические вопросы экзаменационного билета. Уверенно, логично, последовательно и аргументировано

	<p>излагает свой ответ. Может ответить на дополнительные вопросы.</p> <p>2. Самостоятельно и правильно решил все предложенных задачи экзаменационного билета. Уверенно и логично объясняет ход решения, обосновывая его определениями и утверждениями высшей математики.</p>
Хорошо «4»	<p>1. Самостоятельно ответил на поставленные теоретические вопросы экзаменационного билета. Не уверенно отвечает на уточняющие и дополнительные вопросы.</p> <p>2. Самостоятельно и правильно решил две предложенные задачи экзаменационного билета. Уверенно и логично объясняет ход решения, обосновывая его определениями и утверждениями высшей математики</p>
Удовлетворительно «3»	<p>1. Самостоятельно ответил на поставленные теоретические вопросы экзаменационного билета. При этом допускает ошибки. Не уверенно или вообще не отвечает на уточняющие и дополнительные вопросы.</p> <p>2. Решил одну из предложенных задач экзаменационного билета. При наличии ошибок, может исправить их за счет наводящих вопросов. Не уверенно объясняет ход решения задачи.</p>
Неудовлетворительно «2»	<p>1. Не решена задача экзаменационного билета.</p> <p>2. Решена задача, но не даны ответы на теоретические вопросы экзаменационного билета.</p>

### 3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания по дисциплине

3.1 В ходе реализации дисциплины используются следующие формы и методы текущего контроля

Тема и/или раздел	Формы/методы текущего контроля успеваемости
ОПК 1.1 – Знать фундаментальные законы природы и основные физические математические законы и методы накопления, передачи и обработки информации	
Тема 1. Векторные пространства и линейная алгебра	экзамен
Тема 2. Элементы аналитической геометрии	экзамен
Тема 3. Введение в математический анализ.	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 4. Дифференциальное исчисление	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 5. Интегральное исчисление функции одного переменного	Практическая работа-зачет, экзамен
ОПК 1.2 - Уметь применять физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера	
Тема 4. Дифференциальное исчисление	Практическая работа-зачет, экзамен

Тема 5. Интегральное исчисление функции одного переменного	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 6. Обыкновенные дифференциальные уравнения	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 7. Функции нескольких переменных	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 8. Элементы векторного анализа	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 9. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление	экзамен
ОПК 1.3 - Владеть навыками использования знаний физики и математики при решении практических задач	
Тема 4. Дифференциальное исчисление	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 5. Интегральное исчисление функции одного переменного	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 6. Обыкновенные дифференциальные уравнения	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 7. Функции нескольких переменных	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 8. Элементы векторного анализа	Практическая работа-зачет, экзамен
Тема 9. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление	Практическая работа-зачет, экзамен

### 3.2. Типовые материалы текущего контроля успеваемости обучающихся

#### ОПК-1 Способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности

Практическая работа №11 по теме «Предел функции, свойства пределов. Раскрытие неопределенностей. Первый и второй замечательные пределы»

1. Цель работы:

1.1. Изучить понятие предела функции, свойства предела функций. способы задания функции.

1.2 Основные способы раскрытия неопределенностей пределов функций.

1.3 Свойства первого и второго замечательных пределов..

2. Подготовка к работе:

Изучить главы учебного пособия [1, 2, стр. 132-147], посвященные соответствующим вопросам практического занятия. Изучить соответствующие материалы по конспекту лекций.

#### КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

##### I Предел функции, свойства пределов

1. Пусть функция  $f(x)$  определена на множестве  $X = \{x\}$ , тогда:

Число  $A$  называется *пределом функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  (или в точке  $x_0$ ) и обозначается:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A,$$

если для любого, даже сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$ , найдется такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x \neq x_0$ , удовлетворяющих условию:

$$|x - x_0| < \delta,$$

выполняется неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

2. Функция  $\alpha(x)$  ( $F(x)$ ) называется *бесконечно малой* (*бесконечно большой*) при  $x \rightarrow x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \quad \left( \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \infty \right).$$

3. К *простейшим элементарным функциям* относятся:

степенная функция  $y = x^n$ ;

показательная функция  $y = a^x$ ;

логарифмическая функция  $y = \log_a x$ ;

тригонометрические функции  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ ;

обратные тригонометрические функции  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = \operatorname{arcctg} x$ .

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### ПРИМЕР 1

Найти значение предела функции  $y = \frac{3x^2 - 2}{x + 3}$ , при  $x \rightarrow 2$ .

РЕШЕНИЕ:

Решение сводится к вычислению предела  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2}{x + 3}$ .

Применим к заданному пределу теорему о пределах (1.8.):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2}{x + 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)}.$$

Каждый из пределов  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)$  является пределом от элементарной функции (степенной). Их значения найдем по формуле, непосредственно подставляя в выражение каждой из функций вместо переменной  $x$  ее предельное значение  $x_0 = 2$ , тогда:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2}{x + 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)} = \frac{3 \cdot 4 - 2}{2 + 3} = \frac{10}{5} = 2.$$

Из вычислений видно, что числитель полученного выражения стремится к 10, знаменатель – к 5, а предел их отношения стремится к 2, следовательно число 2 является пределом заданной функции при  $x \rightarrow 2$ .

### ПРИМЕР 2

Найти значение предела:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$ .

РЕШЕНИЕ:

1. Непосредственная подстановка предельного значения аргумента  $x_0 = 2$  приводит к неопределенности типа  $\frac{0}{0}$ , так как  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 8) = 0$ . В этом и подобных случаях нельзя воспользоваться теоремой о пределах (1.6.) - (1.8.), однако непосредственная подстановка необходима для определения типа неопределенности.

2. Раскроем неопределенность  $\frac{0}{0}$ , путем сокращения дроби на множитель  $(x-2)$ , создающий неопределенность (см. п.4.1.). Затем снова проверим значение предела непосредственной подстановкой  $x_0 = 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)}{(x^2 + 2x + 4)} = \frac{2+2}{4+4+4} = \frac{1}{3}.$$

## II Раскрытие неопределенностей

Предел элементарной функции в точке ее определения  $x_0$  равен частному значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

В общем случае функция  $f(x)$  может быть и не определена в точке  $x_0$ , т.е.  $x_0 \notin X$ .

Предел постоянной величины  $C$  равен самой постоянной  $C$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C.$$

Нарушение ограничений, накладываемых на функции при вычислении их пределов, приводит к *неопределенностям* вида:

$$\left( \frac{0}{0} \right); \left( \frac{\infty}{\infty} \right); (\infty - \infty); (0 \cdot \infty); (1^\infty).$$

Элементарными приемами раскрытия неопределенностей являются:

- сокращение множителя, создающего неопределенность;
- перевод иррациональности из числителя в знаменатель (или наоборот) путем умножения на сопряженное выражение и числителя, и знаменателя дроби;
- деление числителя и знаменателя на одну и ту же функцию аргумента (часто старшую степенную функцию аргумента);
- применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших;
- использование I и II замечательных пределов.

*Замечание:* использование приемов 4.4\* и 4.5\* будет рассмотрено в теме 2.

*Теорема о пределах.*

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены в некоторой окрестности точки  $x_0$ , кроме, быть может, самой точки  $x_0$ , и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ . Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B ;$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B ;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ если } B \neq 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} .$$

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### ПРИМЕР 1

Найти значение предела: 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{x-1} .$$

РЕШЕНИЕ:

1. Подстановка предельного значения аргумента  $x_0 = 1$  снова приводит к неопределенности типа  $\frac{0}{0}$ . Однако в отличие от Примера 2 здесь нельзя сразу сократить числитель и знаменатель дроби на множитель  $(x-1)$ , создающий эту неопределенность.
2. Для раскрытия неопределенности предварительно преобразуем функцию, умножив числитель и знаменатель дроби на  $(\sqrt{3+x} + 2)$  - выражение, сопряженное числителю; тем самым переведем иррациональность из числителя в знаменатель).

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{x-1} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{3+x} + 2}{\sqrt{3+x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{3+x} + 2)} =$$

3. Сократив дробь на  $(x-1)$ , раскрываем неопределенность. Затем находим значение предела непосредственной подстановкой  $x_0 = 1$ .

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt{3+x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{3+x} + 2} = \frac{1}{4} .$$

### ПРИМЕР 2

Найти значение предела: 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^3 + 5x - 2}{-4x^3 + 7} .$$

РЕШЕНИЕ:

1. Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности типа  $\frac{\infty}{\infty}$ , которая раскрывается путем деления числителя и знаменателя исходной дроби на одну и ту же функцию аргумента.
2. Для раскрытия данной неопределенности разделим числитель и знаменатель на старшую степень аргумента, т.е. на функцию  $x^3$ . Так как при  $x \rightarrow \infty$  слагаемые  $5/x^2$ ,  $2/x^3$  и  $7/x^3$  являются бесконечно малыми, то в результате получаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^3 + 5x - 2}{-4x^3 + 7} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 + 5/x^2 - 2/x^3}{-4 + 7/x^3} = \frac{12 + 0 + 0}{-4 + 0} = -3$$

### ПРИМЕР 3

Найти значение предела:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 100}{3^{2x} - 1}$ .

РЕШЕНИЕ:

1. Подстановка предельного аргумента снова приводит к неопределенности типа  $\frac{\infty}{\infty}$ .

2. Разделим числитель и знаменатель на функцию  $3^x$ , в результате получаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 100}{3^{2x} - 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 100/3^x}{3^x - 1/3^x} = \left( \frac{1}{\infty} \right) = 0,$$

поскольку при  $x \rightarrow \infty$  слагаемые  $100/3^x$  и  $1/3^x$  являются бесконечно малыми, то функция в знаменателе  $3^x$  при  $x \rightarrow \infty$  остается бесконечно большой.

Неопределенности типа  $(\infty - \infty)$  и  $(0 \cdot \infty)$  предварительно сводятся к неопределенностям типа  $\left( \frac{0}{0} \right)$  или  $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)$ , основные способы раскрытия которых рассмотрены выше.

### ПРИМЕР 4

Найти значение предела:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(x+a)} - x)$ .

РЕШЕНИЕ:

1. Подстановка предельного аргумента приводит к неопределенности типа  $\infty - \infty$ .

2. Умножим и разделим выражение в скобках на сопряженное ему:  $(\sqrt{x(x+a)} + x)$ . Таким

образом, неопределенность типа  $(\infty - \infty)$  преобразуется в неопределенность  $\left( \frac{0}{0} \right)$ , которая

раскрывается, в данном случае, делением числителя и знаменателя дроби на множитель  $x$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(x+a)} - x) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(x+a)} - x) \frac{\sqrt{x(x+a)} + x}{\sqrt{x(x+a)} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x+a) - x^2}{\sqrt{x(x+a)} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\cancel{2}} + ax - x^{\cancel{2}}}{\sqrt{x^2 + ax + x}} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+a/x+1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{1+a/x+1}} = \frac{a}{1+1} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

## II Первый и второй замечательные пределы

1. I замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1,$$

где  $\alpha(x)$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow 0$ .

часто встречаются следующие его разновидности:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{nx} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{\sin nx} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \text{ и т.д.}$$

II замечательный предел:

$$\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e,$$

часто встречаются следующие его разновидности:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

2. Две функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$ , одновременно стремящиеся к нулю или бесконечности при  $x \rightarrow x_0$ , называются эквивалентными и обозначаются  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

Предел отношения бесконечно малых (бесконечно больших) функций не изменится, если каждую из них заменить эквивалентной ей функцией, т.е.:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

*Примеры некоторых эквивалентных функций:*

$\sin x \sim x,$	при $x \rightarrow 0$	$(1+x)^n \sim 1+nx,$	при $x \rightarrow 0$
$tg x \sim x,$	при $x \rightarrow 0$	$\sqrt[n]{1+x} \sim 1 + \frac{1}{n}x,$	при $x \rightarrow 0$
$\cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2,$	при $x \rightarrow 0$	$\ln(1+x) \sim x,$	при $x \rightarrow 0$
$ch x \sim 1 + \frac{1}{2}x^2,$	при $x \rightarrow 0$	$a^x \sim 1 + x \ln a,$	при $x \rightarrow 0$
$sh x \sim x,$	при $x \rightarrow 0$	$e^x \sim 1 + x,$	при $x \rightarrow 0$

3. При нахождении пределов вида

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = C$$

следует иметь в виду, что:

3.1. если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B, \quad \text{то } C = A^B;$$

3.2. если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 1$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$ , то вопрос о нахождении предела) решается непосредственно;

3.3. если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$ , то имеет место неопределенность типа  $(1^\infty)$ , которая раскрывается с помощью II замечательного предела. В таких случаях полагают  $f(x) = 1 + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$  и, следовательно,

$$C = \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \left[ 1 + \alpha(x) \right]^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right\}^{\alpha(x) \cdot g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x) \cdot g(x))},$$

где  $e \approx 2,718\dots$  – число Эйлера.

4. Если существует и положителен  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , то:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [\ln f(x)] = \ln \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]$$

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

#### ПРИМЕР 1

Найти значение предела:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ .

РЕШЕНИЕ:

1. Подстановка предельного аргумента  $x_0 = 0$  приводит к неопределенности  $\left(\frac{0}{0}\right)$ , следовательно, в данном пределе можно выделить I замечательный предел

2. Домножим числитель и знаменатель дроби на 5, тогда:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \sin 5x}{5x} = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5.$$

I замечательный предел

#### ПРИМЕР 2

Найти значение предела:  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{x^2 - \pi^2}$ .

РЕШЕНИЕ:

1. Непосредственная подстановка предельного аргумента приводит к неопределенности типа  $\frac{0}{0}$ . Для ее раскрытия введем новую переменную  $t = x - \pi$ . Учитывая, что  $t \rightarrow 0$  и  $x = t + \pi$ , получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{x^2 - \pi^2} &= \left. \begin{array}{l} t = x - \pi \\ t \rightarrow 0 \\ x = t + \pi \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(3t + 3\pi)}{t \cdot (t + 2\pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t \cdot \cos 3\pi + \cos 3t \cdot \sin 3\pi}{t \cdot (t + 2\pi)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin 3t}{t \cdot (t + 2\pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin 3t \cdot 3}{3t \cdot (t + 2\pi)} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{3t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3}{t + 2\pi} = -1 \cdot \frac{3}{2\pi} = -\frac{3}{2\pi} \end{aligned}$$

#### ПРИМЕР 3

Найти значение предела:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-2x})(\cos(3x) - 1)}{x \cdot \operatorname{tg}^2 x}$ .

РЕШЕНИЕ:

1. Учитывая формулы эквивалентных при  $x \rightarrow 0$  функций, находим, что:

$$(1 - e^{-2x}) \sim -2x; \quad \cos(3x) - 1 \sim \frac{1}{2}(3x)^2 = \frac{9}{2}x^2; \quad \operatorname{tg}^2 x \sim x^2.$$

2. Заменяя в пределе бесконечно малые функции их эквивалентами, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-2x})(\cos(3x) - 1)}{x \cdot \operatorname{tg}^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x \cdot \frac{9}{2} x^2}{x \cdot x^2} = -9.$$

ПРИМЕР 4

Найти значение предела:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$ .

РЕШЕНИЕ:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)}.$$

2. Учитывая формулу первого замечательного предела, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = 1.$$

Поэтому:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x} = 2^1 = 2.$$

ПРИМЕР 5

Найти значение предела:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1-x}$ .

РЕШЕНИЕ:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} (1-x)}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+1/x}{2+1/x} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (1-x) = -\infty.$$

Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1-x} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}\right) = (2^\infty) = \infty.$$

ПРИМЕР 6

Найти значение предела:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x-1}$ .

РЕШЕНИЕ:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)} = (1^\infty)$$

2. Для раскрытия неопределенности преобразуем выражение в скобках к виду  $1 + \alpha(x)$ :

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 + \left(\frac{-2}{x+1}\right).$$

получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{x-1} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 1 + \left( \frac{-2}{x+1} \right) \right]^{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{-2}{x+1} \right) \right]^{\frac{x+1}{-2}} \right\}^{\frac{-2}{x+1}(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{-2}{x+1} \right) \right]^{\frac{x+1}{-2}} \right\}^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(x-1)}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(x-1)}{x+1}} = e^{-2}. \end{aligned}$$

II замечательный предел

**ПРИМЕР 7**

Найти значение предела:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{x}$ .

**РЕШЕНИЕ:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln e = 1.$$

II замечательный предел

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ:**

**I** Найти значения следующих пределов:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{3x^2 - 3ax + 5x - 5a} \qquad 2. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$$

**II** Найти значения следующих пределов:

$$\begin{array}{ll} 1. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} & 2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4} \\ 3. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} & 4. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{4x^2 + x + 1} \\ 5. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 3\sqrt{x} - 4x\sqrt{x}}{1 - x} & 6. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt{x+1}}}{x+1} \\ 7. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} - x \right) & 8. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x \left( \sqrt{x^2 + 1} - x \right) \right] \end{array}$$

**III** Найти значения следующих пределов:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{2}}{x^2}; \qquad 2. \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \quad \text{замена } x-1=t;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x^2 + 3}{(x-5)^2 + 3x^2} \right)^{\frac{2x^2-1}{x-3}};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(x-6)^2}{3x^2 - 5 + x} \right)^{\frac{4x^2+3}{1+2x}};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3x+2}{x+2} \right)^{\frac{4x+1}{x(3x+2)}};$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+2}{5x-3} \right)^{\frac{2x^2-6x+1}{1-2x}};$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(2x+1) - \ln(x+2)];$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \ln x + \ln \left( \sin \frac{1}{x} \right) \right];$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right);$$

$$10. \lim_{n \rightarrow 0} \left( n^2 \ln \cos \frac{\pi}{n} \right)$$

### 3.3 Типовые материалы для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень вопросов для экзаменов:

1. Определитель матрицы. Свойства определителя. Вычисление определителей
2. Асимптоты функции. Исследование функции с помощью асимптот. Общая схема исследования функции
3. Линейные операции над матрицами
4. Понятие матрицы. Умножение матрицы на число, сложение и умножение матриц, операция транспонирования
5. Методы решения систем линейных уравнений: метод Гаусса
6. Предел последовательности - определение, геометрический смысл
7. Способы задания прямой на плоскости: уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, уравнение прямой, проходящей через две точки
8. Приращение аргумента функции и приращение функции. Условия непрерывности функции в точке и на промежутке (a; b). Понятие одностороннего предела.
9. Понятие бесконечно малой функции, ее свойства. Понятие бесконечно большой величины, ее свойства. Связь бесконечно больших и бесконечно малых величин
10. Общая схема логарифмического дифференцирования сложных функций. Дифференцирование неявных функций.
11. Гипербола, ее каноническое уравнение. Характеристики гиперболы
12. Способы задания прямой на плоскости: общее уравнение прямой, уравнение прямой с угловым коэффициентом
13. Скалярное произведение в декартовых координатах
14. Векторное произведение в декартовых координатах.
15. Функция одной переменной, основные понятия. Общие свойства функций. Способы задания функций.
16. График функции в различных системах координат. Прямоугольная (декартова) и полярная системы координат. Переход из полярной в декартовую систему координат и обратный переход
17. Неопределенный интеграл. Первообразная.
18. Табличное интегрирование.
19. Интегрирование с помощью замены переменных
20. Интегрирование по частям
21. Интегрирование рациональных функций
22. Интегрирование тригонометрических функций
23. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.
24. Решение ОДУ первого порядка и задачи Коши для них
25. Решение ОДУ второго порядка и задачи Коши для них.

26. Решение линейных ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.
27. Метод Эйлера решения дифференциальных уравнений.
28. Метод Бернулли. Дифференциальное уравнение Бернулли.
29. Метод неопределенных коэффициентов.
30. Применение ДУ к решению физических задач
31. Функции многих переменных.
32. Предел и непрерывность функции многих переменных.
33. Дифференцирование функций многих переменных.
34. Геометрические приложения функций многих переменных.
35. Вычисление частных производных функции многих переменных.
36. Локальный экстремум функции двух переменных.
37. Необходимое и достаточное условие экстремума функции двух переменных.
38. Условный экстремум функции двух переменных.
39. Функция Лагранжа функции двух переменных.
40. Интегрирование функций многих переменных. Криволинейные интегралы 1 рода.
41. Вычисление криволинейных интегралов первого рода.
42. Свойства криволинейных интегралов первого рода.
43. Криволинейные интегралы 2 рода.
44. Теория функций комплексного переменного. Комплексные числа.
45. Элементарные функции комплексного переменного.
46. Формы представления комплексного числа.

Банк контрольных вопросов, заданий и иных материалов, используемых в процессе процедур текущего контроля и промежуточной аттестации находится в учебно-методическом комплексе дисциплины и/или представлен в электронной информационно-образовательной среде по URI:<http://www.aup.uisi.ru>.

### **3.4 Методические материалы проведения текущего контроля и промежуточной аттестации обучающихся**

Перечень методических материалов для подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации:

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Высшая математика». – URL: <http://aup.uisi.ru/> <http://aup.uisi.ru/3816837/>